

ZADANIE

Dla I klasy liceum z B23

1. Metryczka zadania

Oznaczenie zadania (numer)	Zakres materiału (wg podstawy programowej)	Szacowana łatwość (w skali: b. łatwe, łatwe, średniotrudne, trudne, b. trudne)	Maksymalna liczba punktów	Szacowany czas potrzebny na rozwiązanie (w min.)
B23-8	7.5 roz.	średniotrudne	7	10

2. Treść zadania

Uzasadnić, że

A. W każdym trójkącie o bokach długości a, b, c pole P wyraża się wzorem:

$$P = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

gdzie r jest promieniem okręgu wpisanego w trójkąt.

B. W każdym trójkącie pole P o bokach długości a, b, c wyraża się wzorem:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

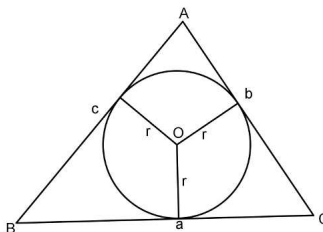
gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie.

3. Modelowe rozwiązanie (jeżeli istnieją różne sposoby rozwiązania to przynajmniej komentarz w tej kwestii)

A. Założenie: Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c oraz okrąg wpisany w niego o środku O i promieniu r .

Teza: $P = \frac{1}{2}(a + b + c)r$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia tak jak na rysunku.



Łączymy punkt O z wierzchołkami trójkąta. Wtedy trójkąt $\triangle ABC$ został podzielony na trzy trójkąty o wspólnej wysokości r . Zatem $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle AOB} + P_{\triangle BOC} + P_{\triangle COA} = \frac{1}{2} \cdot ar + \frac{1}{2} \cdot br + \frac{1}{2} \cdot cr = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$.

B. Założenie: Dany jest trójkąt o bokach długości a, b, c oraz okrąg na nim opisany o środku O i promieniu R .

Teza: $P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$.

Dowód. W zadaniu 23-5 udowodniliśmy, że $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \alpha$. Na mocy twierdzenia sinusów zachodzi: $\frac{|BC|}{\sin \alpha} = 2R$, gdzie R jest promieniem okręgu opisanego na trójkącie ΔABC . Zatem $\sin \alpha = \frac{|BC|}{2R}$. Stąd, uwzględniając wzór na pole trójkąta, otrzymujemy $P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \frac{|BC|}{2R}$. Przyjmując, że $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$ mamy:

$$P = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

4. Schemat oceniania

zadanie	modelowe etapy rozwiązania zadania	liczba punktów
A	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	dostrzeżenie, że dany trójkąt da się podzielić na 3 trójkąty o wspólnej wysokości	1
	przeprowadzenie rachunków	1
B	analiza tematu zadania (zapisanie założenia i tezy twierdzenia)	1
	skorzystanie z twierdzenia sinusów	1
	skorzystanie z zadanie 23-5	1
	przeprowadzenie rachunków	1

5. Propozycje wykorzystania (na lekcji, praca domowa, zadanie dodatkowe, zadanie powtórkowe, praca samodzielna, materiały do MOODL-a itp.)

na lekcji, praca domowa, praca samodzielna